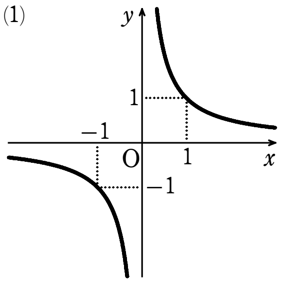
数学III　教科書　練習問題の答えです。

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習1]

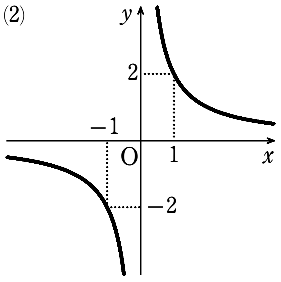
次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\dfrac{1}{x}$　　(2)　$y=\dfrac{2}{x}$　　(3)　$y=-\dfrac{3}{x}$

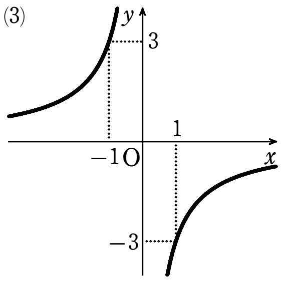
(1)



(2)



(3)



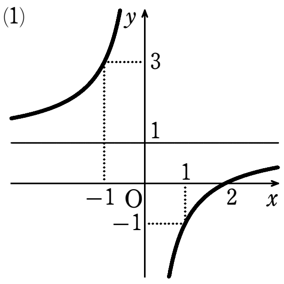
[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習2]

次の関数のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

(1)　$y=-\dfrac{2}{x}+1$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x-2}-1$　　(3)　$y=\dfrac{2}{x+1}-3$

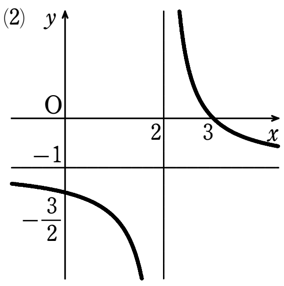
(1)　このグラフは，$y=-\dfrac{2}{x}$ のグラフを y 軸方向に1だけ平行移動したもので，グラフは図のようになる。
漸近線は2直線 $x=0$，$y=1$ である。
また，定義域は $x \fallingdotseq 0$，値域は $y \fallingdotseq 1$ である。

(1)



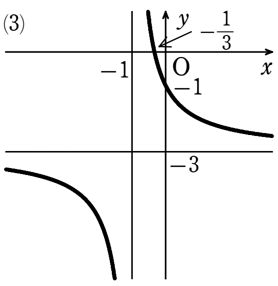
(2)　このグラフは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，グラフは図のようになる。
漸近線は2直線 $x=2$，$y=-1$ である。
また，定義域は $x \fallingdotseq 2$，値域は $y \fallingdotseq -1$ である。

(2)



(3)　このグラフは，$y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 だけ平行移動したもので，グラフは図のようになる。
漸近線は 2直線 $x=-1$，$y=-3$ である。
また，定義域は $x \fallingdotseq -1$，値域は $y \fallingdotseq -3$ である。

(3)



[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習3]

次の関数のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{x-1}{x-2}$　　(2)　$y=\dfrac{-2x+5}{x-1}$　　(3)　$y=\dfrac{4x+3}{2x+1}$

(1)　$\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+1$

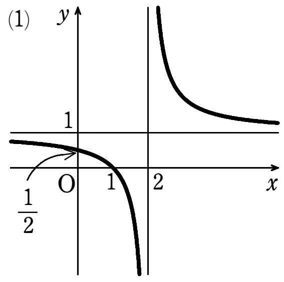
よって　$y=\dfrac{1}{x-2}+1$

したがって，グラフは図のようになる。
漸近線は，次の2直線である。

$x=2$，$y=1$

また，定義域は $x \fallingdotseq 2$，値域は $y \fallingdotseq 1$ である。

(1)



(2)　$\dfrac{-2x+5}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}-2$

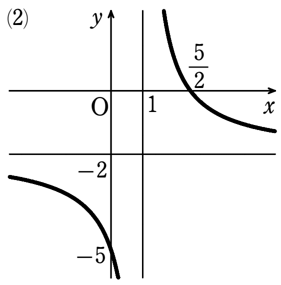
よって　$y=\dfrac{3}{x-1}-2$

したがって，グラフは図のようになる。
漸近線は，次の2直線である。

$x=1$，$y=-2$

また，定義域は $x \fallingdotseq 1$，値域は $y \fallingdotseq -2$ である。

(2)



(3)　$\dfrac{4x+3}{2x+1}=\dfrac{2(2x+1)+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2x+1}+2$

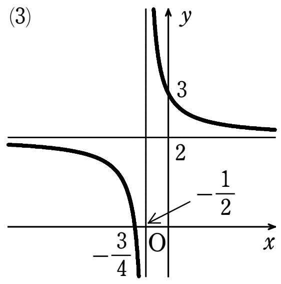
よって　$y=\dfrac{1}{2x+1}+2$

したがって，グラフは図のようになる。
漸近線は，次の2直線である。

$x=-\dfrac{1}{2}$，$y=2$

また，定義域は $x \fallingdotseq -\dfrac{1}{2}$，値域は $y \fallingdotseq 2$ である。

(3)



[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習4]

関数 $y=\dfrac{3}{x+1}$ のグラフと次の直線の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=x-1$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}x$　　(3)　$y=-3$

(1)　$\dfrac{3}{x+1}=x-1$ より　$3=(x-1)(x+1)$

すなわち　$x^2-4=0$

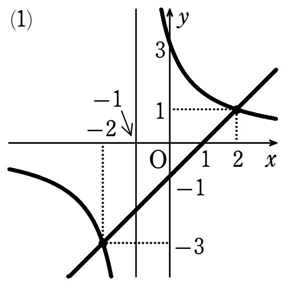
これを解くと　$x=-2,\ 2$

これが共有点の x 座標である。

$y=x-1$ であるから，求める共有点の座標は

$(-2,\ -3)$，$(2,\ 1)$

(1)



(2)　$\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{1}{2}x$ より　$6=x(x+1)$

すなわち　$x^2+x-6=0$

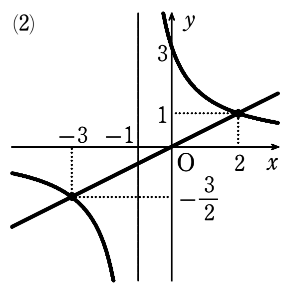
これを解くと　$x=-3,\ 2$

これが共有点の x 座標である。

$y=\dfrac{1}{2}x$ であるから，求める共有点の座標は

$\left(-3,\ -\dfrac{3}{2}\right)$，$(2,\ 1)$

(2)



(3)　$\dfrac{3}{x+1}=-3$ より　$3=-3(x+1)$

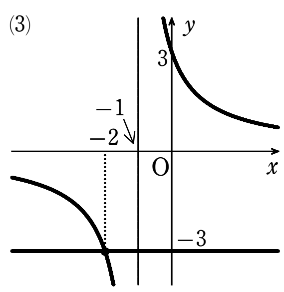
すなわち　$x=-2$

これが共有点の x 座標である。

$y=-3$ であるから，求める共有点の座標は

$(-2,\ -3)$

(3)

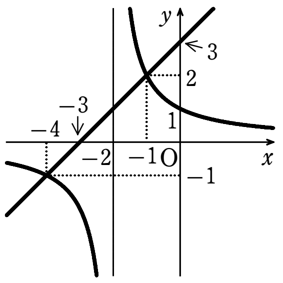


[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習5]
次の方程式，不等式を解け。

(1) $\dfrac{2}{x+2}=x+3$　　　　(2) $\dfrac{2}{x+2}\leqq x+3$

(1) $\dfrac{2}{x+2}=x+3$ より　　$2=(x+3)(x+2)$
　すなわち　　$x^2+5x+4=0$
　これを解いて　　$x=-4,\ -1$

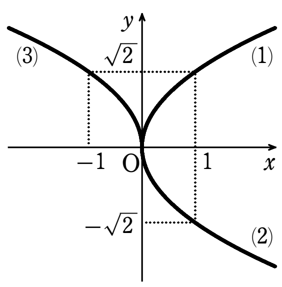
(2) (1) より，関数 $y=\dfrac{2}{x+2}$ のグラフと直線
　$y=x+3$ の共有点の座標は
　　　$(-4,\ -1)$，$(-1,\ 2)$
　グラフから，不等式 $\dfrac{2}{x+2}\leqq x+3$ の解は
　　　$-4\leqq x<-2,\ -1\leqq x$



[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習6]
次の関数のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

(1) $y=\sqrt{2x}$　　(2) $y=-\sqrt{2x}$　　(3) $y=\sqrt{-2x}$

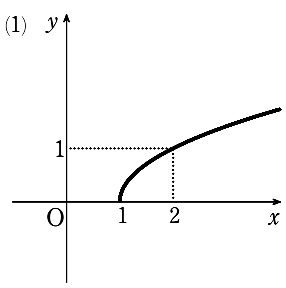
グラフは図のようになる。
(1) 定義域　$x\geqq 0$
　　値域　　$y\geqq 0$
(2) 定義域　$x\geqq 0$
　　値域　　$y\leqq 0$
(3) 定義域　$x\leqq 0$
　　値域　　$y\geqq 0$



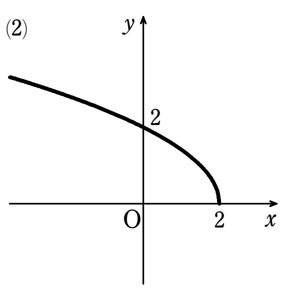
[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習7]
次の関数のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x-1}$　　(2) $y=\sqrt{-2x+4}$　　(3) $y=-\sqrt{3x+3}$

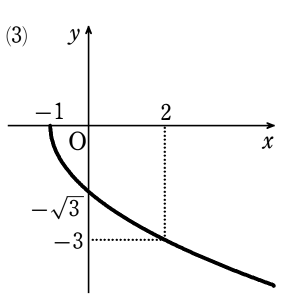
(1) このグラフは，$y=\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，図のようになる。
　定義域は $x\geqq 1$，値域は $y\geqq 0$ である。



(2) 変形すると　　$y=\sqrt{-2(x-2)}$
　このグラフは，$y=\sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，図のようになる。
　定義域は $x\leqq 2$，値域は $y\geqq 0$ である。



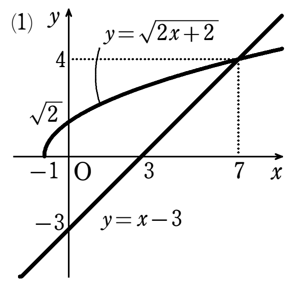
(3) 変形すると
　　　$y=-\sqrt{3(x+1)}$
　このグラフは，$y=-\sqrt{3x}$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，図のようになる。
　定義域は $x\geqq -1$，値域は $y\leqq 0$ である。



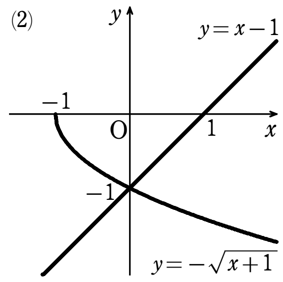
[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習8]
次の 2 つの関数について，グラフの共有点の座標を求めよ。

(1) $y=\sqrt{2x+2}$，$y=x-3$　　　(2) $y=-\sqrt{x+1}$，$y=x-1$

(1) $\sqrt{2x+2}=x-3$ ……①
　の両辺を 2 乗して整理すると　$x^2-8x+7=0$
　これを解くと　　$x=1,\ 7$
　このうち，① を満たすのは $x=7$ で，このとき
　① の両辺の値は 4 である。
　よって，共有点の座標は　　$(7,\ 4)$



(2) $-\sqrt{x+1}=x-1$ ……①
　の両辺を 2 乗して整理すると　$x^2-3x=0$
　これを解くと　　$x=0,\ 3$
　このうち，① を満たすのは $x=0$ で，このとき
　① の両辺の値は -1 である。
　よって，共有点の座標は　　$(0,\ -1)$

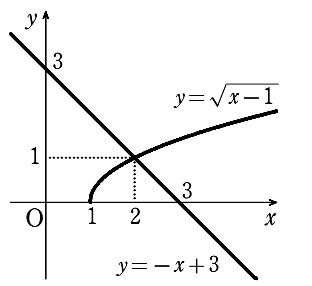


[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習9]
次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sqrt{x-1}=-x+3$　　　(2) $\sqrt{x-1}\leqq -x+3$

(1) $\sqrt{x-1}=-x+3$ の両辺を 2 乗して整理すると
　　　　$x^2-7x+10=0$
　これを解くと　　$x=2,\ 5$
　このうち，等式 $\sqrt{x-1}=-x+3$ を満たすのは $x=2$ である。
　よって，方程式の解は　　$x=2$

(2) (1) より，関数 $y=\sqrt{x-1}$ のグラフと直線
　$y=-x+3$ の共有点の座標は
　　　$(2,\ 1)$
　グラフから，不等式 $\sqrt{x-1}\leqq -x+3$ の解は
　　　$1\leqq x\leqq 2$



[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習10]
次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y=3x-1$ $(0\leqq x\leqq 2)$　　　(2) $y=-\sqrt{x}$
(3) $y=3^x$　　　(4) $y=\log_4 x$

(1) 与えられた関数の値域は　$-1\leqq y\leqq 5$
　$y=3x-1$ を x について解くと　$x=\dfrac{y+1}{3}$ $(-1\leqq y\leqq 5)$
　x と y を入れかえて，求める逆関数は
　　　$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ $(-1\leqq x\leqq 5)$
(2) 与えられた関数の値域は　$y\leqq 0$
　$y=-\sqrt{x}$ を x について解くと　$x=y^2$ $(y\leqq 0)$
　x と y を入れかえて，求める逆関数は　$y=x^2$ $(x\leqq 0)$
(3) $y=3^x$ を x について解くと　　$x=\log_3 y$
　x と y を入れかえて，求める逆関数は　　$y=\log_3 x$
(4) $y=\log_4 x$ を x について解くと　　$x=4^y$
　x と y を入れかえて，求める逆関数は　　$y=4^x$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習11]
次の関数の逆関数を求めよ。
(1) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ (2) $y=\dfrac{-x+2}{x+3}$

(1) $\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{5}{x-1}+2$ であるから，関数 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ の値域は $y\neq 2$ である。
$y(x-1)=2x+3$ より $(y-2)x=y+3$
ここで，$y\neq 2$ であるから $x=\dfrac{y+3}{y-2}$
よって，求める逆関数は $y=\dfrac{x+3}{x-2}$
(2) $\dfrac{-x+2}{x+3}=\dfrac{5}{x+3}-1$ であるから，関数 $y=\dfrac{-x+2}{x+3}$ の値域は $y\neq -1$ である。
$y(x+3)=-x+2$ より $(y+1)x=-3y+2$
ここで，$y\neq -1$ であるから $x=\dfrac{-3y+2}{y+1}$
よって，求める逆関数は $y=\dfrac{-3x+2}{x+1}$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習12]
次の関数の逆関数を求めよ。
(1) $y=x^2+2$ $(x\geqq 0)$ (2) $y=-x^2$ $(x\leqq 0)$

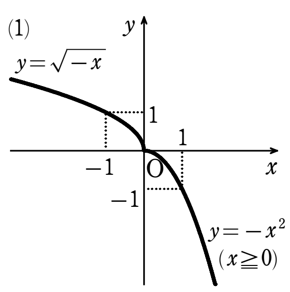
(1) $y=x^2+2$ を x について解くと $x=\pm\sqrt{y-2}$
$x\geqq 0$ であるから $x=\sqrt{y-2}$
よって，求める逆関数は $y=\sqrt{x-2}$
(2) $y=-x^2$ を x について解くと $x=\pm\sqrt{-y}$
$x\leqq 0$ であるから $x=-\sqrt{-y}$
よって，求める逆関数は $y=-\sqrt{-x}$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習13]
$a\neq 0$ とする。関数 $f(x)=ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(2)=4$，$f^{-1}(1)=-4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

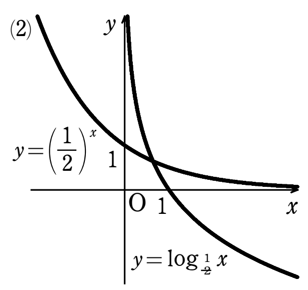
$f(2)=4$ であるから $2a+b=4$ …… ①
$f^{-1}(1)=-4$ のとき $f(-4)=1$ であるから $-4a+b=1$ …… ②
①，② を解いて $a=\dfrac{1}{2}$，$b=3$
これは，$a\neq 0$ を満たす。

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習14]
次の関数のグラフおよびその逆関数のグラフを同じ図中にかけ。
(1) $y=\sqrt{-x}$ (2) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$

(1) $y=\sqrt{-x}$ を x について解くと
$x=-y^2$ $(y\geqq 0)$
よって，与えられた関数の逆関数は
$y=-x^2$ $(x\geqq 0)$
グラフは，図のようになる。



(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ を x について解くと
$x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^y$
よって，与えられた関数の逆関数は
$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
グラフは，図のようになる。



[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習15]
$f(x)=x^2$，$g(x)=\log_2(x+1)$ について，次の合成関数を求めよ。
(1) $(g\circ f)(x)$ (2) $(f\circ g)(x)$

(1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=\log_2(x^2+1)$
(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\log_2(x+1))=\{\log_2(x+1)\}^2$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習16]
$f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=x^2$ $(x\geqq 0)$ について，$(f\circ g)(x)$，$(g\circ f)(x)$ がそれぞれの定義域において $(f\circ g)(x)=x$，$(g\circ f)(x)=x$ となることを確かめよ。

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=\sqrt{x^2}$
$x\geqq 0$ であるから $\sqrt{x^2}=x$
よって $(f\circ g)(x)=x$
また $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2=x$

――――――ここから第4章――――――――――――
[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習1]
次の数列の極限値をいえ。
(1) $\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，……，$\dfrac{n+1}{n}$，……
(2) -1，$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{3}$，……，$\dfrac{(-1)^n}{n}$，……
(3) $\cos\pi$，$\cos 3\pi$，$\cos 5\pi$，……，$\cos(2n-1)\pi$，……

(1) 数列 $1+1$，$1+\dfrac{1}{2}$，$1+\dfrac{1}{3}$，……，$1+\dfrac{1}{n}$，…… は 1 に収束する。
すなわち，この数列の極限値は 1
(2) 数列 -1，$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{3}$，……，$\dfrac{(-1)^n}{n}$，…… は，各項の符号が負，正，負，…… と交互に変わりながら 0 に収束する。
すなわち，この数列の極限値は 0
(3) n が自然数のとき $\cos(2n-1)\pi=-1$
したがって，数列 $\cos\pi$，$\cos 3\pi$，$\cos 5\pi$，……，$\cos(2n-1)\pi$，…… は -1 が無限に続く数列であるから -1 に収束する。
すなわち，この数列の極限値は -1

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習2]
第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。
(1) $2n$ (2) $-\dfrac{1}{n}$ (3) $-n^2$ (4) $1+(-1)^n$

(1) n を限りなく大きくすると，$2n$ の値は限りなく大きくなる。
したがって，この数列の極限は ∞
(2) n を限りなく大きくすると，$-\dfrac{1}{n}$ は 0 に限りなく近づく。
したがって，この数列の極限は 0
(3) n を限りなく大きくすると，$-n^2$ の値は負で，その絶対値は限りなく大きくなる。
したがって，この数列の極限は $-\infty$
(4) この数列は 0 と 2 が交互に現れ，n を限りなく大きくするとき，$1+(-1)^n$ の値は収束しない。したがって，この数列の極限は ない

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習3]
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=-2$ のとき，次の極限を求めよ。
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-1)$
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n$ (5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+5}{2a_n-1}$ (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}$

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=1-(-2)=3$
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n=3\cdot 1+2\cdot(-2)=-1$
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}1=1-1=0$
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=1\cdot(-2)=-2$
(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+5}{2a_n-1}=\frac{\lim_{n\to\infty}(b_n+5)}{\lim_{n\to\infty}(2a_n-1)}=\frac{-2+5}{2\cdot 1-1}=3$
(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)}{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)}=\frac{1-(-2)}{1+(-2)}=-3$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習4]
次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)$　(2) $\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)$　(3) $\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$　(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$　(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}$

(1) $\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(2-\frac{1}{n}\right)=\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n}-3\right)=-\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{2}{n^2}-1\right)=-\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=0$

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{2+\frac{1}{n}}=\infty$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習5]
次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$　(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-n)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}=-\frac{1}{2}$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習6]
θ を定数とするとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}$$

$-1\leqq\cos\frac{n\theta}{6}\leqq 1$ より　$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}\leqq\frac{1}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}=0$$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習7]
第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $(\sqrt{3})^n$　(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$　(3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$　(4) $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

(1) 数列 $\{(\sqrt{3})^n\}$ では $\sqrt{3}>1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3})^n=\infty$

(2) 数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ では $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

(3) 数列 $\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right\}$ では $-\frac{4}{3}<-1$ であるから，極限はない。振動する。

(4) 数列 $\left\{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}$ では $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=0$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習8]
数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$-1<x-1\leqq 1$　すなわち　$0<x\leqq 2$

$-1<x-1<1$ すなわち $0<x<2$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(x-1)^n=0$

$x-1=1$ すなわち $x=2$ のとき　$\lim_{n\to\infty}(x-1)^n=1$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習9]
次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}$　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=0$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習10]
数列 $\left\{\frac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。

(1) $r>1$　(2) $r=1$　(3) $|r|<1$　(4) $r<-1$

(1) $r>1$ のとき，$\left|\frac{1}{r}\right|<1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(2) $r=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(3) $|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(4) $r<-1$ のとき，$\left|\frac{1}{r}\right|<1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習11]
次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{4}\right)$

よって，　数列 $\left\{a_n-\frac{3}{4}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列である。

その初項は，$a_1-\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ であるから

$$a_n-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3}{4}\right)=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習12]
次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}+\cdots\cdots$

(1) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

したがって，この無限級数は収束して，その和は $\dfrac{1}{2}$ である。

(2) $$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}&=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\end{aligned}$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\\&=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習13]
次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) 初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$　　(2) 初項 $\sqrt{2}$，公比 $-\sqrt{2}$

(3) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\cdots\cdots$　　(4) $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots\cdots$

(1) 初項が 1，公比について $\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

(2) 初項が $\sqrt{2}$，公比について $|-\sqrt{2}|>1$ であるから，発散する。

(3) 公比 $r=-\dfrac{1}{3}$

初項が 1，公比について $\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

(4) 公比 $r=\sqrt{2}-1$

初項が $\sqrt{2}+1$，公比について $|\sqrt{2}-1|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習14]
次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1) $1+(2-x)+(2-x)^2+\cdots\cdots$　　(2) $x+x(2-x)+x(2-x)^2+\cdots\cdots$

(1) 初項が 1，公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は $|2-x|<1$ より　$-1<2-x<1$

よって　$1<x<3$

(2) 初項が x，公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　$x=0$ または $|2-x|<1$

$|2-x|<1$ より　$1<x<3$

よって，求める x の値の範囲は　$x=0,\ 1<x<3$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習15]
数直線上で，点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み，そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^2}$，そこから正の向きに $\dfrac{1}{2^4}$，そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^6}$ と進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ。

点 P の座標は，順に次のようになる。

$1,\ 1-\dfrac{1}{2^2},\ 1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4},\ 1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}-\dfrac{1}{2^6},\ \cdots\cdots$

よって，点 P の極限の位置の座標は，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2^2}$ の無限等比級数で表される。

公比について $\left|-\dfrac{1}{2^2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)}=\frac{4}{5}$$

したがって，点 P の極限の位置の座標は　$\dfrac{4}{5}$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習16]
次の循環小数を分数で表せ。

(1) $0.\dot{6}$　　(2) $0.2\dot{3}\dot{4}$　　(3) $0.4\dot{7}0\dot{2}$

(1) $0.\dot{6}=0.6+0.06+0.006+\cdots\cdots$

よって，$0.\dot{6}$ は初項 0.6，公比 0.1 の無限等比級数である。

$|0.1|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.\dot{6}=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}$$

(2) $0.2\dot{3}\dot{4}=0.2+0.034+0.00034+\cdots\cdots$

この右辺の第 2 項以降は，初項 0.034，公比 0.01 の無限等比級数である。

$|0.01|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.2\dot{3}\dot{4}=0.2+\frac{0.034}{1-0.01}=\frac{2}{10}+\frac{34}{990}=\frac{232}{990}=\frac{116}{495}$$

(3) $0.4\dot{7}0\dot{2}=0.4+0.0702+0.0000702+\cdots\cdots$

この右辺の第 2 項以降は，初項 0.0702，公比 0.001 の無限等比級数である。

$|0.001|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.4\dot{7}0\dot{2}=0.4+\frac{0.0702}{1-0.001}=\frac{4}{10}+\frac{702}{9990}=\frac{4698}{9990}=\frac{87}{185}$$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習17]
次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3^n}\right)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}$

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ は，初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ は，初項 $\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\dfrac{1}{4}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3^n}\right)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

(2) $\dfrac{2^n-3^n}{4^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ は，初項 $\dfrac{3}{4}$，公比 $\dfrac{3}{4}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$，$\left|\dfrac{3}{4}\right|<1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=1-3=-2$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習18]

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$ は発散することを示せ。

第 n 項を a_n とすると　$a_n=(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$

$n\longrightarrow\infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ は発散するから，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する。

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習19]

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)$　(2) $\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}$　(4) $\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}$

(1) $\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)=2\cdot1^2-3\cdot1-1=-2$

(2) $\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)=(-2-3)\cdot(-2+2)=0$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}=\frac{0+1}{2\cdot0-3}=-\frac{1}{3}$

(4) $\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}=\sqrt{1-(-1)}=\sqrt{2}$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習20]

次の極限を求めよ。ただし，(3) の a は 0 でない定数とする。

(1) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$　(2) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$　(3) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)$

(1) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(x-3)=-6$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-2}=-3$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{(a+x)-a}{a(a+x)}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{a(a+x)}=\frac{1}{a^2}$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習21]

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$　(2) $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(1) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$

(2) $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-2^2}=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)=4$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習22]

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1$　(2) $\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1$

(1) $\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1$ …… ①

が成り立つとする。$\lim_{x\to2}(x-2)=0$ であるから

$\lim_{x\to2}(a\sqrt{x}+b)=0$

よって，$\sqrt{2}a+b=0$ となり　$b=-\sqrt{2}a$ …… ②

このとき

$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$

$=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}$

$\frac{a}{2\sqrt{2}}=-1$ のとき ① が成り立つから　$a=-2\sqrt{2}$

このとき，② から　$b=-\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=4$　答 $a=-2\sqrt{2}$，$b=4$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1$ …… ①

が成り立つとする。$\lim_{x\to0}x=0$ であるから

$\lim_{x\to0}(a\sqrt{x+4}+b)=0$

よって，$2a+b=0$ となり　$b=-2a$ …… ②

このとき

$\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{a}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{a}{4}$

$\frac{a}{4}=1$ のとき ① が成り立つから　$a=4$

このとき，② から　$b=-2\times4=-8$　答 $a=4$，$b=-8$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習23]

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}$　(2) $\lim_{x\to-1}\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$

(1) $\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$

(2) $\lim_{x\to-1}\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}=-\infty$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習24]

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}$　(2) $\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}$　(3) $\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$　(4) $\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

(1) $x>0$ のとき　$\frac{|x|}{x}=1$　よって　$\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=1$

(2) $x<0$ のとき　$\frac{|x|}{x}=-1$　よって　$\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=-1$

(3) $x>1$ のとき　$\frac{x^2-1}{|x-1|}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$

よって　$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=2$

(4) $x<1$ のとき　$\frac{x^2-1}{|x-1|}=\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}=-(x+1)$

よって　$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=-2$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習25]
次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習26]
次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)=\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)=\infty$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習27]
次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{4+\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{4}{x^2}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{5}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-x}{3+\frac{2}{x}}=-\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習28]
次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2-2t}-2t)$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2-2t}-2t)(\sqrt{4t^2-2t}+2t)}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2-2t)-(2t)^2}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{t\sqrt{4-\frac{2}{t}}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4-\frac{2}{t}}+2}$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習29]
次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2 x$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_{0.5}x$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2 x=\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_{0.5}x=\infty$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習30]
次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}2^{-3x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^{-2x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x-1}{x+2}$

(1) $x\longrightarrow\infty$ のとき $-3x\longrightarrow-\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}2^{-3x}=0$

(2) $x\longrightarrow-\infty$ のとき $-2x\longrightarrow\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^{-2x}=\infty$

(3) $\displaystyle\frac{4x-1}{x+2}=\frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$ であるから，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$\displaystyle\frac{4x-1}{x+2}\longrightarrow4$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x-1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\log_2 4=2$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習31]
次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\tan x$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\tan x=0$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習32]
次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}$

(1) $\displaystyle0\leqq\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq1$ より　$\displaystyle0\leqq\left|x\cos\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq|x|$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to0}|x|=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left|x\cos\frac{1}{x}\right|=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}=0$

(2) $0\leqq|\sin x|\leqq1$ より　$\displaystyle0\leqq\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\frac{|\sin x|}{|x|}\leqq\frac{1}{|x|}$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

(3) $0\leqq|\cos x|\leqq1$ より　$\displaystyle0\leqq\left|\frac{\cos x}{x}\right|=\frac{|\cos x|}{|x|}\leqq\frac{1}{|x|}$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習33]
次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=\frac{2}{3}\cdot1=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot1=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right)=\frac{3}{5}\cdot1\cdot1=\frac{3}{5}$

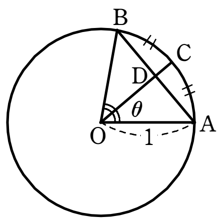
[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習34]
次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$

(1) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{-\frac{x}{\sin x}\cdot(\cos x+1)\right\}=-1\cdot2=-2$$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習35]
半径 1 の円 O の周上に中心角 θ ラジアンの弧 AB をとり，弧 AB を 2 等分する点を C とする。また，線分 OC と弦 AB の交点を D とする。弧 AB の長さを $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ で表すとき，極限 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}^2}$ を求めよ。



AB⊥OD で，OD は ∠AOB の二等分線であるから　$\angle\mathrm{AOD}=\dfrac{\theta}{2}$

よって　$\mathrm{CD}=\mathrm{OC}-\mathrm{OD}=1-\cos\dfrac{\theta}{2}$

また　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=2\cdot1\cdot\pi\cdot\dfrac{\theta}{2\pi}=\theta$

したがって，求める極限は

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{\theta}{2}}\right\}=\frac{1}{4}\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習36]
次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。

(1) $f(x)=x[x]$　(2) $f(x)=(x+1)[x]$　(3) $f(x)=\sqrt{x}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-0}x[x]=0\cdot(-1)=0,\ \lim_{x\to+0}x[x]=0\cdot0=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$

また　$f(0)=0\cdot0=0$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$ が成り立つから，関数 $f(x)=x[x]$ は $x=0$ で連続である。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-0}(x+1)[x]=1\cdot(-1)=-1,\ \lim_{x\to+0}(x+1)[x]=1\cdot0=0$

よって，$x\longrightarrow0$ のときの $f(x)$ の極限はない。

したがって，関数 $f(x)=(x+1)[x]$ は $x=0$ で不連続である。

(3) 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の定義域は $x\geqq0$ で　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=0,\ f(0)=0$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=f(0)$ が成り立つから，関数 $f(x)=\sqrt{x}$ は $x=0$ で連続である。

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習37]
次の関数が連続である区間を求めよ。

(1) $f(x)=\sqrt{1-x}$　(2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

(1) $f(x)=\sqrt{-(x-1)}$

関数 $f(x)=\sqrt{1-x}$ が連続である区間は　$(-\infty,\ 1]$

(2) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ が連続である区間は　$(-\infty,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ \infty)$

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習38]
次の区間における関数 $f(x)=\cos x$ の最大値，最小値について調べよ。

(1) $[0,\ \pi]$　(2) $[-\pi,\ \pi]$

(1) 区間 $[0,\ \pi]$ において，$f(x)$ は

$x=0$ で最大値 1，$x=\pi$ で最小値 -1

をとる。

(2) 区間 $[-\pi,\ \pi]$ において，$f(x)$ は

$x=0$ で最大値 1，$x=-\pi,\ \pi$ で最小値 -1

をとる。

[323改訂版 高等学校 数学Ⅲ 練習39]
方程式 $2^x-3x=0$ は，$3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

$f(x)=2^x-3x$ とおくと，$f(x)$ は閉区間 $[3,\ 4]$ で連続である。

また　$f(3)=2^3-3\cdot3=-1<0$

　　　$f(4)=2^4-3\cdot4=4>0$

よって，方程式 $f(x)=0$ すなわち $2^x-3x=0$ は，$3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。